基于按指数律拓展的分数阶积分的 El-Nabulsi-Pfaff 变分问题的 Noether 对称性*

丁金凤[1]，张 毅[2]
（1. 苏州科技学院 数理学院，江苏 苏州 215009；
2. 苏州科技学院 土木工程学院，江苏 苏州 215009）

摘 要： 基于 El-Nabulsi 动力学模型，提出并研究了 Birkhoff 系统基于按指数律拓展的分数阶积分的变分问题的 Noether 对称性与守恒量。基于按指数律拓展的分数阶积分的 El-Nabulsi-Pfaff-Birkhoff 变分问题，建立起与之对应的 El-Nabulsi-Birkhoff 方程；基于 El-Nabulsi-Pfaff 作用量在无限小变换下的不变性，给出系统的 Noether 对称变换和 Noether 准对称变换的定义和判据。该研究建立 Birkhoff 系统基于按指数律拓展的分数阶积分的变分问题的 Noether 定理，揭示了该模型下系统的 Noether 对称性和守恒量之间的关系。文末举例说明结果的应用。

关键词： Birkhoff 系统；Noether 对称性；El-Nabulsi 动力学模型；按指数律拓展的分数阶积分；守恒量

中图分类号： O316 **文献标志码：** A **文章编号：** 0529－6579（2014）06－0150－05

Noether Symmetries for El-Nabulsi-Pfaff Variational Problem from Extended Exponentially Fractional Integral

DING Jinfeng[1], *ZHANG Yi*[2]
（1. College of Mathematics and Physics, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215009, China；
2. College of Civil Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215009, China）

Abstract： Based on El-Nabulsi dynamical model, the Noether symmetries and the conserved quantities for the variational problem of Birkhoffian system from extended exponentially fractional integral are presented and studied. Firstly, the El-Nabulsi-Pfaff-Birkhoff variational problem from extended exponentially fractional integral is presented, then the corresponding El-Nabulsi-Birkhoff equations are derived. Secondly, the definitions and the criteria of the Noether symmetric transformations and the Noether quasi-symmetric transformations of the system are given, which are based on the invariance of El-Nabulsi-Pfaff action under the infinitesimal transformations of group. Finally, the Noether theorem for the variational problem of Birkhoffian system from extended exponentially fractional integral is established, which reveals the inner relationship between a Noether symmetry and a conserved quantity. An example is given to illustrate the application of the results.

Key words： Birkhoffian system；Noether symmetry；El-Nabulsi dynamical model；extended exponentially fractional integral；conserved quantity

为研究非保守系统的动力学建模，1996 年 Riewe[1-2]利用分数阶微积分将非保守力项纳入 La-

* **收稿日期：** 2014－01－05
基金项目： 国家自然科学基金资助项目（10972151，11272227）
作者简介： 丁金凤（1983 年生），女；**研究方向：** 力学中的数学方法；**通讯作者：** 张毅；E-mail：weidiezh@gmail.com

grange 函数和 Hamilton 函数之中，提出了分数阶变分问题，建立了分数阶 Euler-Lagrange 方程和分数阶 Hamilton 方程。此后，Agrawal[3]，Atanacković[4]，Torres[5]等在 Riewe 研究的基础上对分数阶变分问题进行了更为深入的研究。2005 年以来，El-Nabulsi 在分数阶微积分的框架下基于分数阶积分的定义建立了一种新的非保守系统动力学模型[6-8]，该模型所得的动力学方程形式上类似于经典方程，但方程不出现分数阶导数，却包含相应于耗散力项的广义外力，这样既避免了分数阶微积分计算，同时又解决了非保守力的建模问题。近年来，基于 El-Nabulsi 模型的非线性动力学及其对称性和守恒量的研究已经取得了一系列重要成果[9-18]。本文进一步将基于按指数律拓展的 El-Nabulsi 动力学模型拓展到 Birkhoff 系统，研究 Birkhoff 系统基于按指数律拓展的分数阶积分的 Noether 定理。

1　El-Nabulsi-Pfaff 变分问题

基于按指数律拓展的分数阶积分的 El-Nabulsi-Pfaff 变分问题定义为[19]：

求积分泛函

$$S(\gamma)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}[R_\mu(\tau,a^\nu)\dot{a}^\mu-B(\tau,a^\nu)]\cdot(\cosh t-\cosh\tau)^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau \tag{1}$$

在给定边界条件

$$a^\mu|_{\tau=t_1}=a_1^\mu,\quad a^\mu|_{\tau=t_2}=a_2^\mu\quad(\mu=1,\cdots,2n) \tag{2}$$

下的极值问题，其中 $B=B(\tau,a^\nu)$ 为 Birkhoff 函数，$R_\mu=R_\mu(\tau,a^\nu)$ 为 Birkhoff 函数组，a^μ 为 Birkhoff 变量，且 $\dot{a}^\mu=\dfrac{\mathrm{d}a^\mu}{\mathrm{d}\tau}$，$\Gamma$ 是 Euler Gamma 函数，$0<\alpha\leqslant 1$，τ 是固有时间，t 是观察者时间，$\tau\neq t$，函数 B 和 R_μ 是其变量的 C^2 类函数，γ 是某曲线。

如果 $a^\mu=a^\mu(\tau)$ 是 El-Nabulsi-Pfaff 变分问题的极值，则满足如下的 El-Nabulsi-Birkhoff 方程[19]

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial\tau}=\frac{(1-\alpha)\sinh\tau}{(\cosh t-\cosh\tau)}R_\mu,\quad(\mu=1,\cdots,2n) \tag{3}$$

泛函（1）称为 El-Nabulsi-Pfaff 作用量。当 $\alpha=1$ 时，这个问题成为经典的 Pfaff 变分问题，而方程（3）成为标准的 Birkhoff 方程。

2　El-Nabulsi-Pfaff 作用量的变分

引入 r－参数有限变换群的无限小变换

$$\bar{\tau}=\tau+\Delta\tau,\bar{a}^\mu(\bar{\tau})=a^\mu(\tau)+\Delta a^\mu\quad(\mu=1,\cdots,2n) \tag{4}$$

其展开式

$$\bar{\tau}=\tau+\varepsilon_\sigma\xi_0^\sigma(\tau,a^\nu),\bar{a}^\mu(\bar{\tau})=a^\mu(\tau)+\varepsilon_\sigma\xi_\mu^\sigma(\tau,a^\nu)\quad(\mu=1,\cdots,2n) \tag{5}$$

其中 ε_σ 为无限小参数，$\xi_0^\sigma,\xi_\mu^\sigma$ 为无限小变换的生成函数或生成元。在无限小变换（4）作用下，曲线 γ 变换为邻近曲线 $\bar{\gamma}$，则 El-Nabulsi-Pfaff 作用量（1）变换为

$$S(\bar{\gamma})=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2}[R_\mu(\bar{\tau},\bar{a}^\nu)\dot{\bar{a}}^\mu-B(\bar{\tau},\bar{a}^\nu)]\cdot(\cosh t-\cosh\bar{\tau})^{\alpha-1}\mathrm{d}\bar{\tau} \tag{6}$$

El-Nabulsi-Pfaff 作用量（1）在变换前后的差为

$$\begin{aligned}S(\bar{\gamma})-S(\gamma)=&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2}[R_\mu(\bar{\tau},\bar{a}^\nu)\dot{\bar{a}}^\mu-B(\bar{\tau},\bar{a}^\nu)]\cdot(\cosh t-\cosh\bar{\tau})^{\alpha-1}\mathrm{d}\bar{\tau}-\\&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}[R_\mu((\tau,a^\nu)\dot{a}^\mu-B(\tau,a^\nu)]\cdot(\cosh t-\cosh\tau)^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau=\\&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\Big\{[R_\mu(\tau+\Delta\tau,a^\nu+\Delta a^\nu)(\dot{a}^\mu+\Delta\dot{a}^\mu)-B(\tau+\Delta\tau,a^\nu+\Delta a^\nu)]\cdot\\&[\cosh t-\cosh(\tau+\Delta\tau)]^{\alpha-1}\left(1+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Delta\tau\right)-[R_\mu(\tau,a^\nu)\dot{a}^\mu-B(\tau,a^\nu)](\cosh t-\cosh\tau)^{\alpha-1}\Big\}\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{7}$$

作用量 S 的变分 ΔS 为差 $S(\bar{\gamma})-S(\gamma)$ 相对 ε 的主线性部分，于是有

$$\begin{aligned}\Delta S=&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\Big[\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial\tau}\dot{a}^\mu-\frac{\partial B}{\partial\tau}\right)\Delta\tau+\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\dot{a}^\mu-\frac{\partial B}{\partial a^\nu}\right)\Delta a^\nu+R_\mu\Delta\dot{a}^\mu+(R_\mu\dot{a}^\mu-B)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Delta\tau\Big]\cdot\\&(\cosh t-\cosh\tau)^{\alpha-1}-(R_\mu\dot{a}^\mu-B)(\alpha-1)\Delta\tau\cdot(\cosh t-\cosh\tau)^{\alpha-2}\sinh\tau\Big\}\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{8}$$

由于

$$\delta a^\mu=\Delta a^\mu+\dot{a}^\mu\Delta\tau,\Delta\dot{a}^\mu=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta a^\mu)-\dot{a}^\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta\tau) \tag{9}$$

利用式（9），式（8）可写成

$$\begin{aligned}\Delta S=&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[(R_\mu\Delta a^\mu-B\Delta\tau)(\cosh t-\cosh\tau)^{\alpha-1}]+\\&\Big[\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial\tau}-\frac{(1-\alpha)\sinh\tau}{(\cosh t-\cosh\tau)}R_\mu\Big]\cdot(\cosh t-\cosh\tau)^{\alpha-1}\delta a^\mu\Big\}\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{10}$$

将式（5）代入式（10），得到

$$\Delta S=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\varepsilon_\sigma\cdot$$

$$\Big\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[(R_\mu\xi_\mu^\sigma-B\xi_0^\sigma)(\cosh t-\cosh\tau)^{\alpha-1}]+$$

$$\Big[\Big(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\Big)\dot a^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial\tau}-\frac{(1-\alpha)\sinh\tau}{(\cosh t-\cosh\tau)}R_\mu\Big]\cdot$$

$$(\cosh t-\cosh\tau)^{\alpha-1}(\xi_\mu^\sigma-\dot a^\mu\xi_0^\sigma)\Big\}\mathrm{d}\tau \qquad (11)$$

式（8）和（11）是基于按指数律拓展的分数阶积分的 El-Nabulsi-Pfaff 作用量变分的基本公式。

3 Noether 对称性的定义和判据

定义 1 如果 El-Nabulsi-Pfaff 作用量（1）是无限小群变换（4）的不变量，即对无限小群变换（4）的每一个变换，始终成立如下关系

$$\Delta S=0 \qquad (12)$$

则称无限小变换为 Birkhoff 系统基于按指数律拓展的分数阶积分的变分问题的 Noether 对称变换。

根据定义 1 和公式（8），（11），得到如下判据。

判据 1 如果无限小群变换（4）满足如下关系

$$\Big(\frac{\partial R_\mu}{\partial\tau}\dot a^\mu-\frac{\partial B}{\partial\tau}\Big)\Delta\tau+\Big(\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\dot a^\mu-\frac{\partial B}{\partial a^\nu}\Big)\Delta a^\nu+R_\mu\Delta\dot a^\mu+$$

$$(R_\mu\dot a^\mu-B)\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Delta\tau+\frac{(1-\alpha)\sinh\tau}{\cosh t-\cosh\tau}\Delta\tau\Big)=0 \qquad (13)$$

那么，变换是 Birkhoff 系统在定义 1 意义下的 Noether 对称变换。

式（13）可写成 r 个方程

$$\Big(\frac{\partial R_\mu}{\partial\tau}\dot a^\mu-\frac{\partial B}{\partial\tau}\Big)\xi_0^\sigma+\Big(\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\dot a^\mu-\frac{\partial B}{\partial a^\nu}\Big)\xi_\nu^\sigma+R_\mu(\dot\xi_\mu^\sigma-\dot a^\mu\dot\xi_0^\sigma)+$$

$$(R_\mu\dot a^\mu-B)\Big(\dot\xi_0^\sigma+\frac{(1-\alpha)\sinh\tau}{\cosh t-\cosh\tau}\xi_0^\sigma\Big)=0$$

$$(\sigma=1,\cdots,r) \qquad (14)$$

当 $r=1$ 时，方程（14）称为 Birkhoff 系统基于按指数律拓展的分数阶积分的变分问题的 Noether 等式。

通过判据 1 或 Noether 等式（14）可以判断 Birkhoff 系统基于按指数律拓展的分数阶积分的变分问题的 Noether 对称性。

定义 2 如果 El-Nabulsi-Pfaff 作用量（1）是无限小群变换（4）的准不变量，即对无限小群变换（4）的每一个变换，始终成立如下关系

$$\Delta S=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta G)\mathrm{d}\tau \qquad (15)$$

其中 $\Delta G=\varepsilon_\sigma G^\sigma$，$G^\sigma=G^\sigma(\tau,a^\nu)$ 称为规范函数，则称无限小变换为 Birkhoff 系统基于按指数律拓展的分数阶积分的变分问题的 Noether 准对称变换。

根据定义 2 和公式（8），（11），得到如下判据。

判据 2 如果无限小群变换（4）满足如下关系

$$\Big(\frac{\partial R_\mu}{\partial\tau}\dot a^\mu-\frac{\partial B}{\partial\tau}\Big)\Delta\tau+\Big(\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\dot a^\mu-\frac{\partial B}{\partial a^\nu}\Big)\Delta a^\nu+R_\mu\Delta\dot a^\mu+$$

$$(R_\mu\dot a^\mu-B)\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Delta\tau+\frac{(1-\alpha)\sinh\tau}{\cosh t-\cosh\tau}\Delta\tau\Big)=$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta G)(\cosh t-\cosh\tau)^{1-\alpha} \qquad (16)$$

那么，变换是 Birkhoff 系统在定义 2 意义下的 Noether 准对称变换。

式（16）可写成 r 个方程

$$\Big(\frac{\partial R_\mu}{\partial\tau}\dot a^\mu-\frac{\partial B}{\partial\tau}\Big)\xi_0^\sigma+\Big(\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\dot a^\mu-\frac{\partial B}{\partial a^\nu}\Big)\xi_\nu^\sigma+R_\mu(\dot\xi_\mu^\sigma-\dot a^\mu\dot\xi_0^\sigma)+$$

$$(R_\mu\dot a^\mu-B)\Big(\dot\xi_0^\sigma+\frac{(1-\alpha)\sinh\tau}{\cosh t-\cosh\tau}\xi_0^\sigma\Big)=$$

$$-\dot G^\sigma(\cosh t-\cosh\tau)^{1-\alpha}\quad(\sigma=1,\cdots,r) \qquad (17)$$

当 $r=1$ 时，方程（17）称为 Birkhoff 系统基于按指数律拓展的分数阶积分的变分问题的 Noether 等式。

通过判据 2 或 Noether 等式（17）可以判断 Birkhoff 系统基于按指数律拓展的分数阶积分的变分问题的 Noether 准对称性。

4 Noether 定理

在 El-Nabulsi 动力学模型下，由 Birkhoff 系统的 Noether 对称性可直接导出 Noether 守恒量，有如下定理。

定理 1 对于 El-Nabulsi 动力学模型下的 Birkhoff 系统（3），如果无限小群变换（4）是定义 1 意义下的 Noether 对称变换，则系统存在 r 个线性独立的第一积分，形如

$$I^\sigma=(R_\mu\xi_\mu^\sigma-B\xi_0^\sigma)(\cosh t-\cosh\tau)^{\alpha-1}=c^\sigma$$

$$(\sigma=1,\cdots,r) \qquad (18)$$

证明 由定义 1，得到

$$\Delta S=0$$

由公式（11）得

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\varepsilon_\sigma\Big\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[(R_\mu\xi_\mu^\sigma-B\xi_0^\sigma)(\cosh t-\cosh\tau)^{\alpha-1}]+$$

$$\left[\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot a^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial \tau}-\frac{(1-\alpha)\sinh\tau}{(\cosh t-\cosh\tau)}R_\mu\right]\cdot$$

$$(\cosh t-\cosh\tau)^{\alpha-1}(\xi_\mu^\sigma-\dot a^\mu\xi_0^\sigma)\Big\}\mathrm{d}\tau=0$$

将方程（3）代入上式，并且考虑到 ε_σ 的独立性和积分区间的任意性，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[(R_\mu\xi_\mu^\sigma-B\xi_0^\sigma)(\cosh t-\cosh\tau)^{\alpha-1}]=0$$

积分之，即得到守恒量（18）。于是定理 1 得证。

定理 2　对于 El-Nabulsi 动力学模型下的 Birkhoff 系统（3），如果无限小群变换（4）是定义 2 意义下的 Noether 准对称变换，则系统存在 r 个线性独立的第一积分，形如

$$I^\sigma=(R_\mu\xi_\mu^\sigma-B\xi_0^\sigma)(\cosh t-\cosh\tau)^{\alpha-1}+G^\sigma=c^\sigma \quad (\sigma=1,\cdots,r) \tag{19}$$

证明　由定义（2）和式（11），并利用方程（3）式，且考虑到 ε_σ 的独立性和积分区间的任意性，可证明定理 2。

定理 1 和定理 2 称为 Birkhoff 系统基于按指数律拓展的分数阶积分的变分问题的 Noether 定理。根据上述定理，可由 El-Nabulsi 动力学模型下的 Birkhoff 系统的 Noether 对称性找到相应的守恒量。当 $\alpha=1$ 时，定理 1 和定理 2 称为经典 Birkhoff 系统的 Noether 定理。

5　算　例

例　设 4 阶 Birkhoff 系统的 Brkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 R_μ 为[20]

$$B=\frac{1}{2}[(a^3)^2+2a^2a^3-(a^4)^2],$$

$$R_1=a^2+a^3,R_2=0,R_3=a^4,R_4=0 \tag{20}$$

试研究其基于按指数律拓展的分数阶积分的 El-Nabulsi 动力学模型下的 Noether 对称性与守恒量。

Noether 等式（17）给出

$$(\dot a^1-a^3)\xi_2+(\dot a^1-a^2-a^3)\xi_3+(\dot a^3+a^4)\xi_4+(a^2+a^3)(\dot\xi_1-\dot a^1\dot\xi_0)+a^4(\dot\xi_3-\dot a^3\dot\xi_0)+(a^2\dot a^1+a^3\dot a^1+a^4\dot a^3-B)\left(\dot\xi_0+\frac{(1-\alpha)\sinh\tau}{\cosh t-\cosh\tau}\xi_0\right)=-\dot G(\cosh t-\cosh\tau)^{1-\alpha} \tag{21}$$

方程（21）有解

$$\xi_0=0,\xi_1=1,\xi_2=0,\xi_3=0,\xi_4=0,G=0 \tag{22}$$

生成元（22）相应于所论系统基于按指数律拓展的分数阶积分的 El-Nabulsi 动力学模型下的 Noether 对称变换。根据定理 1，得出相应的守恒量为

$$I=(a^2+a^3)(\cosh t-\cosh\tau)^{\alpha-1}=\mathrm{const} \tag{23}$$

当 $\alpha=1$ 时，守恒量（23）为标准 Birkhoff 系统的 Noether 守恒量。

6　结　语

基于按指数律拓展的分数阶积分的 El-Nabulsi 动力学模型，文章提出并研究了 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与守恒量问题，建立了 Noether 定理。本文方法和结果具有普遍意义，可以进一步应用于各种约束力学系统，例如非完整非保守系统，机电耦合系统等。

参考文献：

[1] RIEWE F. Nonconservative lagrangian and hamiltonian mechanics [J]. Physical Review E, 1996, 53(2): 1890 –1899.

[2] RIEWE F. Mechanics with fractional derivatives [J]. Physical Review E, 1997, 55(3): 3581 –3592.

[3] AGRAWAL O P. Formulation of Euler-lagrange equations for fractional variational problems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002, 272(1): 368 –379.

[4] ATANACKOVIĆ T M, KONJIK S, PILIPOVIĆ S, et al. Variational problems with fractional derivatives: Invariance conditions and Noether's theorem [J]. Nonlinear Analysis, 2009, 71(5/6): 1504 –1517.

[5] MALINOWSKA A B, TORRES D F M. Introduction to the fractional calculus of variations [M]. London: Imperial College Press, 2012.

[6] EL-NABULSI A R. A fractional approach to nonconservative Lagrangian dynamical systems [J]. Fizika A, 2005, 14(4): 289 –298.

[7] EL-NABULSI A R. Fractional variational problems from extended exponentially fractional integral [J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 217: 9492 –9496.

[8] EL-NABULSI A R. A periodic functional approach to the calculus of variations and the problem of time-dependent damped harmonic oscillators [J]. Applied Mathematics Letters, 2011, 24: 1647 –1653

[9] EL-NABULSI A R, TORRES D F M. Fractional actionlike variational problems [J]. Journal of Mathematical Physics, 2008, 49(5): 053521.

[10] EL-NABULSI A R. Fractional action-like variational problems in holonomic, non-holonomic and semi-holonomic constrained and dissipative dynamical systems [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, 42(1): 52 –61.

[11] HERZALLAH M A E, MUSLIH S I, BALEANU D, et al. Hamilton-Jacobi and fractional like action with time scaling [J]. Nonlinear Dynamics, 2011, 66(4): 549－555.

[12] FREDERICO G S F, TORRES D F M. Constants of motion for fractional action-like variational problems [J]. International Journal of Applied Mathematics, 2006, 19(1): 97－104.

[13] FREDERICO G S F, TORRES D F M. Nonconservative Noether's theorem for fractional action-like variational problems with intrinsic and observer times [J]. International Journal of Ecological Economics and Statistics, 2007, 9(F07): 74－82.

[14] ZHANG Y, ZHOU Y. Symmetries and conserved quantities for fractional action-like Pfaffian variational problems [J]. Nonlinear Dynamics, 2013, 73(1/2): 783－793.

[15] 张毅. 相空间中类分数阶变分问题的Noether对称性与守恒量[J]. 中山大学学报:自然科学版, 2013, 52(4): 45－50.

[16] 龙梓轩,张毅. 基于按正弦周期律拓展的分数阶积分的变分问题的Noether定理[J]. 中山大学学报:自然科学版, 2013, 52(5): 51－56.

[17] LONG Z X, ZHANG Y. Noether's theorem for fractional variational problem from El-Nabulsi extended exponentially fractional integral in phase space[J]. Acta Mech, 2014, 225(1): 77－90.

[18] LONG Z X, ZHANG Y. Fractional Noether theorem based on extended exponentially fractional integral [J]. Int J Theor Phys, 2014, 53(3): 841－855.

[19] 丁金凤,张毅. 基于El-Nabulsi动力学模型的Birkhoff力学 [J]. 苏州科技学院学报:自然科学版,2014,31(1):24－28.

[20] HOJMAN S, URRUTIA L E. On the inverse problem of the calculus of variations [J]. J Math Phys, 1981, 22(9): 1896－1903.

(上接第149页)

[7] ALGABA A, REYES M, BRAVO A. Uniformly isochronous quintic planar vector fields [C] //Fiedler B Proceedings of the International Conference on Differential Equations, Vol 2. World Scientific Publishing, Berlin, Germany, 1999, 1415－1417.

[8] GASULL A, PROHENS R, TORREGROSA J. Limit cycles for rigid cubic systems [J]. J Math Anal Appl, 2005, 303 (2): 391－404.

[9] DIAS F S, MELLO L F. The center-focus problem and small amplititude limit cycles in rigid systems [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series A, 2012, 32 (5): 1627－1637.

[10] 刘一戎，李继彬. 平面向量场的若干经典问题 [M]. 北京：科学出版社，2010.